THÉORIE DE LA MESURE ET INTÉGRATION
EXERCICES – semaine finale

Exercice 1.
Soit $\ell^2 = \{(x_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n\geq 0} x_n^2 < \infty\}$.

(a) Pour $(x_n), (y_n) \in \ell^2$, montrer que $\sum_{n\geq 0} |x_n y_n| \leq \sqrt{\sum_{n\geq 0} x_n^2}\sqrt{\sum_{n\geq 0} y_n^2}$.

(b) Déduire qu'on peut définir $\langle (x_n), (y_n)\rangle = \sum_{n\geq 0} x_n y_n$ et que $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire sur ℓ^2.

(c) Montrer que ℓ_0 (l'ensemble des suites réelles avec un nombre fini de termes non-nuls) est un sous-espace dense de ℓ^2.

Exercice 2.
Posons $\ell^\infty = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ suite bornée}\}$ et $\ell_c = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } x_n = 0 \text{ pour tout } n \geq N\}$. On muni ℓ^∞ de la norme $\|.\|_\infty$. Monter que ℓ_c est un sous-espace vectoriel de ℓ^∞. Décrire l'adherence $\overline{\ell_c}$ de ℓ_c dans ℓ^∞. Montrer que $\overline{\ell_c}$ est un espace de Banach (pour la norme $\|.\|_\infty$).
Indication: pour le dernier point, utiliser la complétude de ℓ^∞.

Exercice 3.
Soit $1 \leq p \leq p' \leq \infty$. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ appartenant à $L^q(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ si et seulement si $q \in [p, p']$.

Exercice 4.
Soit μ une mesure positive quelconque sur un espace $(E, \mathcal{E})$ et $f \in L^1(E, \mu)$. Définissons $\nu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ par

$$\nu(A) = \int_A f(x)\, d\mu(x), \qquad \forall A \in \mathcal{E}.$$

(a) Vérifier que ν est une mesure signée sur E. Montrer que $|\nu| = |f| d\mu$ et déduire en particulier que $\|\nu\|_{VT} = \|f\|_1$.
On dit que $L^1(E, \mu)$ s'injecte de manière isométrique dans $M(E, \mathcal{E})$.

(b) Exprimer ν_+ et ν_- à l'aide de f.

(c) Expliciter un ensemble B tel que $\nu_+(B^c) = 0$ et $\nu_-(B) = 0$.

Exercice 5.
Soient μ une mesure positive et ν une mesure signée sur un espace $(E, \mathcal{E})$. Sans utiliser la décomposition de Hahn, montrer que $|\nu| \perp \mu$ si et seulement si, pour tout $A \in \mathcal{E}$ avec $\mu(A) > 0$ on a $\nu(A) = 0$. *En d'autre mots, montrer que $|\nu| \perp \mu$ si et seulement si $\nu \perp \mu$.*

Exercice 6.
Soient μ une mesure signée. A l'aide de la décomposition de Hahn, montrer que dans le sup

de la définition de $|\mu|$ on peut se limiter à des partitions formées de deux ensembles et que le sup est atteint:

$$|\mu|(A) = \max\{|\mu(B_1)| + |\mu(B_2)| : \text{ avec } A = B_1 \sqcup B_2\}.$$

Exercice 7.
Soit E un ensemble fini ou dénombrable. Posons $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$ et notons μ la mesure de comptage sur E. Soit ν une mesure signée sur $(E, \mathcal{E})$. Montrer que $\nu \ll \mu$ et déterminer la densité de ν par rapport à μ.

Exercice 8.
(a) Montrer que si μ est une mesure positive finie sur $\mathbb{R}$, alors la forme linéaire $\Lambda : f \mapsto \int f d\mu$ définie sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ est bien définie et s'étend par continuité à $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.
(b) Montrer que si μ est une mesure positive sur $\mathbb{R}$, finie sur les compacts, mais avec $\mu(\mathbb{R}) = \infty$, alors la forme linéaire $\Lambda : f \mapsto \int f d\mu$ définie sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ est bien définie mais pas continue. Est-ce possible d'éteindre f à $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$?

Exercice 9.
Soient λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et ν une mesure positive finie sur les compacts. Montrer que $\nu \ll \lambda$ si et seulement si il existe une fonction positive mesurable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont l'intégrale sur tout compact est finie et telle que $\nu = f\, d\lambda$.

Plus généralement, montrer que ν se décompose en une partie absolument continue et une partie étrangère par rapport à λ.
Indication: Appliquer le théorème 10.1 sur chaque intervalle $[n, n+1)$.

Exercice 10.
On écrit $\mathcal{C}^1([-1,1])$ pour l'ensemble des fonctions continuellement dérivables de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$ définie une norme sur $\mathcal{C}^1([-1,1])$.
(b) Montrer que $f \mapsto f'(0)$ est une forme linéaire discontinue sur $\mathcal{C}^1([-1,1])$.
(c) ☠ Quelle est l'adherence de $\mathcal{C}^1([-1,1])$ dans $L^\infty([-1,1])$ pour la norme $\|.\|_\infty$? Est-ce que $\mathcal{C}^1([-1,1])$ est complet pour $\|.\|_\infty$?
(d) Posons $|||f||| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ pour $f \in \mathcal{C}^1([-1,1])$. Montrer que $|||.|||$ est une norme sur $\mathcal{C}^1([-1,1])$ et que $f \mapsto f'(0)$ est continue pour cette norme.
(e) ☠ Montrer que $\mathcal{C}^1([-1,1])$ est complet pour $|||.|||$.

Exercice 11.
Soient $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble et $(a_x)_{x\in A}$ une famille de nombres strictement positifs. Définissons $\mu = \sum_{x\in\mathbb{R}} a_x \delta_x$ la mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie par

$$\mu(B) = \sum_{x\in A\cap B} a_x.$$

(a) A quelle condition est μ finie sur les compacts? Exprimer la condition en utilisant les ensembles $A_\epsilon = \{x \in A : a_x > \epsilon\}$. Montrer que si μ finie sur les compacts, alors A est au plus dénombrable.

(b) Supposons que μ est finie sur les compacts. Montrer qu'elle est étrangère par rapport à λ.

Exercice 12.
Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ finie sur les compacts. Posons

$$\mu_{\text{at}} = \sum_{x \in \mathbb{R}} \nu_1(\{x\}) \delta_x$$

Montrer que μ_{at} est une mesure purement atomique, finie sur le compacts. Montrer que $\mu - \mu_{\text{at}}$ est une mesure positive sur $\mathbb{R}$, sans atomes.